

钻柱力学若干基本问题的研究

高德利

(石油大学石油工程系, 北京昌平 102200)

摘要 依据动力学普遍原理, 采用微元矢量分析方法, 建立了钻柱的一般平衡方程, 其中包含了钻柱的涡动效应. 在此基础上, 导出了不可伸长弹性钻柱变形的一般动态控制方程, 并且对钻柱下部组合(简称BHA)的静力分析方法及钻柱摩阻分析方法进行了讨论. 此外, 还就钻柱运动学及其弹性稳定性问题进行了初步探讨, 给出以钻柱为研究对象的基本方程. 这些基本方程也适用于其它相同性质问题的管柱.

关键词 钻柱力学; 向量分析; 平衡方程; 定向井; 定向控制

中图分类号 TE 22

作者简介 高德利, 男, 1958年生, 1982年毕业于华东石油学院开发系钻井工程专业, 1984年获西南石油学院硕士学位, 1990年获石油大学博士学位, 1992年在清华大学完成博士后研究工作. 现为石油大学石油工程系教授, 主要从事钻井力学及定向井技术方面的研究.

0 引言

40年代以来, 钻柱力学研究在国内外得到了很大发展. 为了解决井眼轨迹控制问题, 国内外在钻柱下部组合(Bottomhole Assembly, 简称BHA)力学分析研究方面做了大量工作, 取得了许多可喜的科研成果和实践经验^[1~23], 但对BHA的大挠度效应和动态特性仍认识不足; 在钻柱振动特性研究方面, 已经对钻柱的纵向振动、扭转振动和横向振动分别进行了经典分析^[24], 但对更复杂的耦合振动问题^[25]仍研究得不够; 在定向井、水平井及深井中, 钻柱所受到的摩擦阻力是不可忽视的^[26~30], 在钻柱弹性稳定性问题的研究方面, 从鲁宾斯基的平面分析^[37]开始发展到三维分析^[38~40], 但多局限于常规直井或斜直井中的钻柱静力稳定性问题, 很少涉及动力稳定性问题^[41]和弯曲井眼中的这类问题; 在钻柱运动学研究方面, 人们对钻柱自转或公转的印象比较深, 但对钻柱的涡动(Whirling)问题^[42]仍缺少明确的认识, 而且对不同运动形式的存在缺少判据. 本文仅就钻柱力学研究的若干基本问题进行讨论, 给出有关的基本方程和分析方法.

1 基本方程

1.1 几何方程

钻柱弹性变形线任一点的矢径 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s, t)$, 其中 s 和 t 分别为弧长和时间变量. 自然坐标系为 $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b)$, 其中 \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n 和 \mathbf{e}_b 分别是钻柱弹性变形线的切线方向、主法线方向和从法线方向的单位矢量. 由微分几何可知, 钻柱弹性变形线任一点Frenet标架为 $(\mathbf{r}, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b)$, Frenet

收稿时间: 1993-07-12

• 24 •

公式可表达如下：

$$\begin{cases} e_i = r' \\ e'_i = k_i e_n \\ e'_n = k_i e_s - k_i e_i \\ e'_s = -k_i e_n \\ (\)' = \frac{\partial(\)}{\partial s} \end{cases} \quad (1)$$

式中， k_i 和 k_s 分别为钻柱弹性变形线 r 点的曲率和挠率，可表达为：

$$\begin{cases} k_i^2 = r'' \cdot r'' \\ k_s = (r', r'', r''') / k_i^2 \end{cases} \quad (2)$$

自然标架作刚体转动，存在如下关系：

$$\begin{cases} e'_i = k_N \times e_i \\ e'_n = k_N \times e_n \\ e'_s = k_N \times e_s \end{cases} \quad (3)$$

式中， k_N 为“自然曲率矢量”，可表达为 $k_N = k_i e_s + k_s e_i$ 。

1.2 平衡方程

取钻柱微元如图1所示，其中 F 表示合内力， M 表示合内力矩， h 表示单位长度外力（包括表面力和体力）， m 表示单位长度分布外力矩。忽略剪切变形和振动阻尼的影响，由动量定理可得：

$$\begin{cases} F' + h = \rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ h = f + qe_s \end{cases} \quad (4)$$

式中， ρ 和 q 分别是钻柱单位长度的质量和浮重； f 为钻柱单位长度的表面作用力； e_s 表示重力方向的单位向量。

考虑钻柱转动惯量的影响，由动量矩定理，可得：

$$\begin{cases} M' + e_s \times F + m = \frac{\partial L}{\partial t} \\ L = \rho r \times (\Omega \times r) + I_0 \omega \\ I_0 = \rho(R_o^2 + R_i^2) / 2 \end{cases} \quad (5)$$

式中， L 表示钻柱单位长度角动量； ω 和 Ω 分别是钻柱自转和进动的角速度（如图2所示）； I_0 表示钻柱单位长度的自转动惯量； R_o 和 R_i 分别为钻柱的内径和外径。若忽略钻柱的动力效应，则式(4)和式(5)分别简化为：

$$F' + h = 0 \quad (6)$$

$$M' + e_s \times F + m = 0 \quad (7)$$

式中， $(\)' = \frac{d(\)}{ds}$ 。将 F 及 M 记为：

$$\begin{cases} F = T e_s + Q_i e_n + Q_o e_s \\ M = M_i e_s - M_o e_n \end{cases} \quad (8)$$

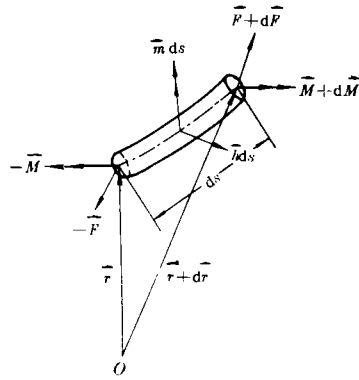


图1 钻柱微元

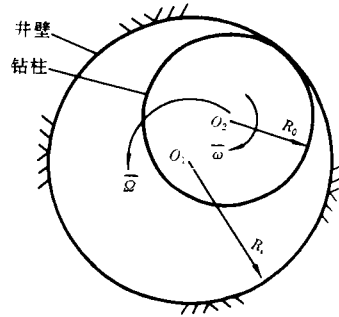


图2 在井眼里滑动的钻柱

其中, Q_n, Q_t 为剪力; T 为轴向力; M_n 为弯矩; M_t 为扭矩. 代入式 (6) 和式 (7) 可得:

$$\begin{cases} Q_n' + k_n T - k_n Q_n + h_n = 0 \\ Q_t' + k_t Q_t + h_t = 0 \\ T' - k_t Q_t + h_t = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -k_n M_n - k_t M_t - Q_n + m_n = 0 \\ M_n' + Q_n + m_n = 0 \\ -M_t' + m_t = 0 \end{cases} \quad (10)$$

式中, $h_i = h \cdot e_i; m_i = m \cdot e_i$ ($i = n, b, t$).

1.3 物理关系

对于圆截面弹性钻柱, 假设其抗弯刚度为 EI , 抗扭刚度为 GJ , 则物理关系为:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = EI \left(\mathbf{e}_i \times \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} \right) + GJ \frac{d\gamma}{ds} \mathbf{e}_i \\ M_n = EI \cdot k_n \\ M_t = -GJ \cdot \frac{d\gamma}{ds} \end{cases} \quad (11)$$

式中, γ 表示扭转角; M_n 为总弯矩; M_t 为钻柱扭矩, 若钻柱顺时针转动 (从井口向下观测), 则 M_t 取正值.

2 不可伸长弹性钻柱的变形控制方程

钻柱不可伸长性要求:

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 \quad (12)$$

将式 (11) 对 s 求导后, 再将式 (1) 代入, 可得:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times [(EI\mathbf{r}'')' + M_n(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')] - M_t \mathbf{r}' \quad (13)$$

代入式 (5) 即得:

$$\mathbf{r}' \times [(EI\mathbf{r}'')' + M_n(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') + \mathbf{F}] - M_t \mathbf{r}' + \mathbf{m} = \partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{t} \quad (14)$$

利用不可伸长性条件式 (12), 由 \mathbf{e}_i 与式 (14) 的数量积和矢量积, 可得式 (15, 16):

$$M_t' = (\mathbf{m} - \partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}' \quad (15)$$

$$\mathbf{F} = -(EI\mathbf{r}'')' + (T - EI k_n^2) \mathbf{r}' - M_n(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{m} - \partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{t}) \times \mathbf{r}' \quad (16)$$

式中, $T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i$ 为钻柱轴向力, 以拉力为正; $k_n^2 = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''$.

将式 (16) 对 s 求导后代入式 (4), 便获得不可伸长弹性钻柱 (圆截面) 的动态变形控制方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{h} - (EI\mathbf{r}'')'' + [(T - EI k_n^2) \mathbf{r}']' - [M_n(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') + (\mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{t}}) \times \mathbf{r}']' \quad (17)$$

在方程 (15~17) 中忽略动力因素, 便得到静力条件下钻柱的变形控制方程:

$$M_t' = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}' \quad (18)$$

$$\mathbf{F} = -(EI\mathbf{r}'')' + (T - EI \cdot k_n^2) \mathbf{r}' + (M_n \mathbf{r}'' - \mathbf{m}) \times \mathbf{r}' \quad (19)$$

$$\mathbf{h} = (EI\mathbf{r}'')'' - [(T - EI k_n^2) \mathbf{r}']' + [M_n(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') - \mathbf{r}' \times \mathbf{m}]' \quad (20)$$

假设: (a) 钻柱各结构单元可具有不同的几何尺寸和材料性质, 但分段保持为常数; (b) 施加的扭矩可沿钻柱有所变化, 但也分段保持为常量. 因此, 式 (18~20) 可进一步简化为:

$$M'_z = 0 \quad (21)$$

$$F = -EI r'''' + (T - EIk_z^2) r' + M_z r'' \times r' \quad (22)$$

$$h = EI r^{(4)} - [(T - EIk_z^2) r']' + M_z (r' \times r'')' \quad (23)$$

对于以上所建立的钻柱变形微分控制方程,可采用纯数值方法(如有限差分法等)或半解析数值方法(如加权余量法等)^[11,14]进行求解。

3 底部钻具组合的静力特性分析

在井眼轨迹控制理论中,通常认为钻头的力学特性主要取决于钻柱下部组合(简称BHA)的受力和变形。BHA一般由钻头、钻铤及稳定器等结构单元组成,处在三维弯曲井眼里,承受自重、钻压、扭矩、井壁支承反力及钻井液浮力等荷载,可作为三维梁柱问题进行分析研究。

取空间笛卡尔参考坐标系 $oxyz$,如图3所示。其中 z 轴经过井眼轴线上 O 点(钻头位置)和 A 点(上稳定器位置); x 轴垂直于 z 轴并指向井眼的低边,即 xoz 平面为铅垂面,并称为井斜平面; y 轴垂直于 xoz 平面,并符合右手系法则,所构成的 $yozy$ 平面称为井斜方位平面;原点 O 取在钻头处或每跨段的下端处。图中 β 表示 z 轴与铅垂线的夹角。在此参考坐标系下,钻柱的位移 r ,内力 F 及外载荷 h 可表达如下:

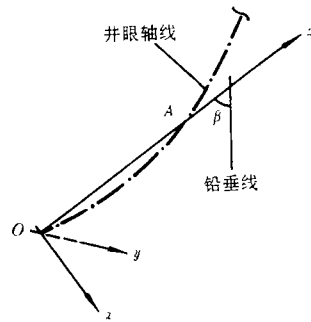


图3 参考坐标系

$$r = Ui + Vj + (Z + W)k \quad (24)$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (25)$$

$$h = h_x i + h_y j + h_z k \quad (26)$$

式中, i, j 和 k 分别为沿 x, y 和 z 三个坐标轴正向的单位矢量; (F_x, F_y, F_z) 和 (h_x, h_y, h_z) 分别表示钻柱内力和外载荷在 x, y, z 轴上的投影分量; (U, V, W) 为钻柱弹性变形线沿 x, y, z 轴的位移分量。

将式(24)表达的 r 及其导数方程连同式(25)和式(26)一起代入方程(22)和(23)中,整理后可得:

$$\begin{cases} F_x = -EI \cdot U'''' + (T - EIk_z^2)U' + M_z(V''W' - V'W'') \\ F_y = -EI \cdot V'''' + (T - EIk_z^2)V' - M_z(U''W' - W''U') + W'U'' \\ F_z = -EI \cdot W'''' + (T - EIk_z^2)(1 + W') + M_z(U''V' - U'V'') \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} EIU^{(4)} - M_z V'''' - (TU')' - h_x = G_1 \\ EIV^{(4)} + M_z U'''' - (TV')' - h_y = G_2 \\ EIW^{(4)} - [T(1 + W')] - h_z = G_3 \\ G_1 = M_z(V''W' - V'W'')' - EI(k_z^2 U')' \\ G_2 = M_z(W''U' - W'U'')' - EI(k_z^2 V')' \\ G_3 = M_z(U''V' - U'V'')' - EI[k_z^2(1 + W')] \end{cases} \quad (28)$$

式中, $G_1, G_2,$ 及 G_3 均表示非线性项; 其它符号意义同前, 其中 h_x, h_y, h_z 及 T 可近似表示为:

$$\begin{cases} h_x = q \sin \beta \\ h_y = 0 \\ h_z = -q \cos \beta \\ F_x = -P + q \cos \beta \end{cases} \quad (29)$$

式中, P 表示BHA 在坐标原点处的 z 向力, 以压力为正.

假设钻头对地层的机械力沿 x, y 及 z 轴的分量分别为 R_x, R_y 和 R_z , 其中的 R_x 以增斜作用为正, R_y 以减方位作用为正, R_z 以对地层的压力作用为正, 则它们与BHA 钻头处的内力 $F_x(0), F_y(0)$ 及 $F_z(0)$ 存在如下关系:

$$\begin{cases} R_x = -F_x(0) \\ R_y = -F_y(0) \\ R_z = -F_z(0) \end{cases} \quad (30)$$

式中, $F_x(0), F_y(0)$ 和 $F_z(0)$ 可由式 (27) 确定.

为便于分析, 定义如下参量:

$$\begin{cases} M_i^* = M_i / EI, & P^* = P / EI, & T^* = T / EI \\ q_x = h_x / EI, & q_y = h_y / EI, & q_z = h_z / EI \\ g_1 = G_1 / EI, & g_2 = G_2 / EI, & g_3 = G_3 / EI \end{cases} \quad (31)$$

代入式 (28), 即得如下形式的BHA 控制方程:

$$\begin{cases} U^{(4)} - M_i^* V'''' - (T^* U')' - q_x = g_1 \\ V^{(4)} + M_i^* U'''' - (T^* V')' - q_y = g_2 \\ W^{(4)} - [T^* (1 + W')] - q_z = g_3 \end{cases} \quad (32)$$

式中, g_1, g_2 和 g_3 可具体表达为:

$$\begin{cases} g_1 = M_i^* (V'' W' - V' W'')' - (k_x^2 U')' \\ g_2 = M_i^* (W'' U' - W' U'')' - (k_y^2 V')' \\ g_3 = M_i^* (U'' V' - U' V'')' - [k_z^2 (1 + W')] \end{cases} \quad (33)$$

若忽略非线性项及 z 向位移的影响, 则式 (27) 和式 (32) 分别简化为:

$$\begin{cases} F_x = EI U'''' + T U' + M_i V'' \\ F_y = -EI V'''' + T V' - M_i U'' \\ F_z = T \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} U^{(4)} - M_i^* V'''' - (T^* U')' = q_x \\ V^{(4)} + M_i^* U'''' - (T^* V')' = q_y \\ (T^*)' = -q_z \end{cases} \quad (35)$$

为了便于对方程 (35) 进行求解, 构造如下复函数:

$$\psi = \psi(s) = U + iV \quad (36)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位; U 和 V 分别称为 ψ 的实部和虚部, 记为 $U = \text{Re}(\psi), V = \text{Im}(\psi)$.

因此, 方程 (35) 可表示为如下形式:

$$\psi^{(4)} + i M_i^* \psi'''' - (T^* \psi')' = q_x \quad (37)$$

若忽略轴向力的变化, 即令 $T^* = -P^*$, 并让 $\psi = \psi_1$, 则方程 (37) 简化为:

$$\psi_1^{(4)} + i M_i^* \psi_1'''' + P^* \psi_1' = q_x \quad (38)$$

若同时忽略轴向力的变化及扭矩的影响, 并让 $\psi = \psi_2$, 则方程 (37) 简化为:

$$\psi_2^{(4)} + P^* \psi_2'' = q_x \quad (39)$$

从文献调研看出, 在BHA 分析中, 国内外学者基于方程 (39) 所进行的研究比较多^[1~6], 而基于方程 (32, 37) 和方程 (38) 所进行的研究则比较少.

对于方程 (32) 和 (37), 只能使用近似方法进行求解^[14, 15], 而对于方程 (38) 和 (39), 则

可求得解析形式的通解。方程 (38) 的通解为：

$$\psi_1(s) = (C_1 \cos ks + C_2 \sin ks) \exp(-i\lambda s) + C_3 s + C_4 + q_1 s^2 / (2P^*) \quad (40)$$

式中， C_1, C_2, C_3 和 C_4 均为任意积分常数。 λ 和 k 可表达如下：

$$\lambda = M_i^* / 2, \quad k = \sqrt{P^* + \lambda^2} \quad (41)$$

方程 (39) 的通解，可令式 (40) $\lambda = 0$ 及 $k = \sqrt{P^*}$ 而获得，即：

$$\psi_2(s) = C_1 \cos(\sqrt{P^*} \cdot s) + C_2 \sin(\sqrt{P^*} \cdot s) + C_3 s + C_4 + q_1 s^2 / (2P^*) \quad (42)$$

关于 BHA 受力和变形的边界条件问题，在静力分析中通常作如下假设：(1) 钻头居于井底中心位置，并与地层之间不产生弯矩；(2) 井眼是圆的，井壁对 BHA 刚性支承（在接触点）；(3) 在切点以上，钻柱躺在井眼低边。因此，BHA 在钻头处的横向位移及弯矩均为零；在切点，BHA 的位移、转角及弯矩均连续，只有剪力发生间断（因与井壁相接触）。

此外，钻柱（或 BHA）的位移必然受井眼几何的严格约束，即钻柱在井眼中的径向位移不能大于井眼视半径（井眼直径与钻柱外径之差的一半）。

4 井眼中钻柱的整体受力模型

通过钻柱整体受力分析，可以了解钻柱与井壁（或套管）的接触力及摩擦阻力的分布情况，可以计算钻柱轴向力及扭矩损失，可以推断实际钻压和钻头扭矩等，这对于钻井工程设计和施工具有重要的实际意义。本节将讨论有关的力学模型及其简化分析方法。

方程 (6) 和方程 (7) 中的 h 和 m 可记为：

$$\begin{cases} h = q + N + f, \\ m = (m_f + m_s) e_i \end{cases} \quad (43)$$

式中， q 为钻柱单位长度有效重量， N/m ； N 为钻柱单位长度所受的横向支承力， N/m ； f 为钻柱单位长度所受的摩擦力， N/m ； m_f 为钻柱与井壁摩擦阻力引起的钻柱单位长度扭矩损失， Nm/m ； m_s 为钻井液粘滞力引起的钻柱单位长度扭矩损失（可忽略不计）， Nm/m 。

将 q, N, f 分别记为：

$$\begin{cases} q = q_i e_i + q_n e_n + q_s e_s, \\ N = N_n e_n + N_s e_s, \\ f = f_n e_n + f_s e_s + f_i e_i \end{cases} \quad (44)$$

式中， $N = \sqrt{N_n^2 + N_s^2}$ 。

利用式 (43) 和式 (44)，忽略钻柱的动力效应，根据方程 (9) 和 (10) 便可得如下基本方程：

$$\frac{d}{ds} \left(T + \frac{M_i^2}{2EI} \right) = -q_i + f_i \quad (45)$$

$$N_n + f_n = A(s) \quad (46)$$

$$N_s + f_s = B(s) \quad (47)$$

$$dM_i / ds = m_f \quad (48)$$

式中， $A(s)$ 和 $B(s)$ 可表达如下：

$$A(s) = \frac{d^2 M_i}{ds^2} - [k_n T + k_n (k_n M_i + k_s M_s) + q_n] \quad (49)$$

$$B(s) = \frac{d}{ds} (k_n M_i + k_s M_s) + k_n \frac{dM_i}{ds} - q_s \quad (50)$$

在一般情况下, 直接对上述方程进行严格求解是非常困难的. 因此, 在钻柱整体受力分析中, 通常采用如下两个假设: (1) 忽略钻柱与井眼间隙的影响, 钻柱弹性变形线与井眼轴线完全重合; (2) 井眼形状规则, 钻柱与井眼连续接触.

利用假设条件(1), 就可以根据设计井的几何参数或实钻井的拟合曲线来确定井中钻柱的变形参量(如 k_s 和 k_t 等), 即钻柱变形成为已知, 从而使问题的求解大为简化. 利用假设条件(2), 就可以方便地处理钻柱与井眼的接触问题, 避开由不规则间断产生的复杂情况. 基于这样的假设, 在特殊工况或附加条件下, 上述钻柱的受力平衡方程可作相应的简化.

4.1 钻柱处在二维井眼里

这时, $k_s=0, q_s=0$, 式(49)和式(50)简化为:

$$\begin{cases} A(s) = \frac{d^2 M_s}{ds^2} - [k_t T + q_s] \\ B(s) = \frac{d}{ds} (k_t M_t) \end{cases} \quad (51)$$

而方程(45)~(48)的形式保持不变.

在这种情形下, 尽管 $A(s)$ 和 $B(s)$ 得到了很大简化, 但 M_t 和 T 仍相互耦合, 非线性问题仍存在, 整个问题的求解仍不容易.

4.2 起下钻(或下套管)时

(1) 钻柱处在三维井眼里

这时应有:

$$\begin{cases} m_j = 0, & m_i = 0 \\ f_{r_s} = f_{t_s} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

于是, 方程(48)消失, 方程(46)和(47)简化为:

$$N_s = A(s) = \frac{d^2 M_s}{ds^2} - k_t T - k_t^2 M_t - q_s \quad (53)$$

$$N_t = B(s) = \frac{d}{ds} (k_t M_t) + k_t \frac{d M_s}{ds} - q_s \quad (54)$$

将式(53), (54)代入式(45)即可得到一个1阶非线性微分方程, 对其进行数值求解便可获得 T 的分布.

(2) 钻柱处在二维井眼里

这时, $k_s=0, q_s=0$, 代入式(53), (54), 则有:

$$N_s = A(s) = \frac{d^2 M_s}{ds^2} - k_t T - q_s \quad (55)$$

$$N_t = B(s) = 0 \quad (56)$$

代入方程(45)中, 可得到关于轴向力 T 的解析表达式.

4.3 钻进中的钻柱受力模型

在钻进时, 由于钻柱的轴向给进速度比其旋转速度小得多, 再加上轴向振动作用, 结果是钻柱轴向摩擦阻力比其扭转摩擦阻力小得多, 即这时的主要问题是钻柱的扭矩损失问题. 因此, 在研究钻进中的钻柱受力问题时, 可以不计钻柱轴向摩擦阻力的影响. 于是, 方程(45)简化为:

$$\frac{d}{ds} \left(T + \frac{M_t^2}{2EI} \right) = -q_s \quad (57)$$

显然, T 与 M_i 已不再相互耦合, 可以由式 (57) 直接求出.

4.4 “软绳”模型

在井眼不出现严重狗腿度的情形下, 钻柱刚度对其受力的影响比较小, 在分析研究中可采用“软绳”模型假设, 即认为钻柱是一根不能承受弯矩的“软绳”(仍能承受扭矩). 这时, 方程 (48) 不变, 而方程 (45)~(47) 可简化为:

$$dT/ds = -q_t + f_{t1} \quad (58)$$

$$N_s + f_{s1} = A(s) = -k_s(T + k_t M_t) - q_s \quad (59)$$

$$N_s + f_{s1} = B(s) = \frac{d}{ds}(k_t M_t) - q_s \quad (60)$$

此外, 方程 (50) 仍适用, 但其中的 $A(s)$ 和 $B(s)$ 应分别由式 (59) 和式 (60) 表达.

国内外对“软绳”模型的分析研究已比较多^[27~30], 并且在此基础上建立了钻柱强度设计与校核方法^[31,32]. 另外, 国外已开始对钻柱摩阻问题进行室内模拟实验研究^[33,34]和现场实时测量^[35].

5 钻柱弹性稳定性问题

任何物体均可能具有三种形式的平衡状态, 即稳定平衡状态、不稳定平衡状态(失稳状态)和随遇平衡状态(临界状态). 如果结构所承受的载荷系统是与其某一特征参数成比例, 并且系统是保守的, 则存在两种可能的基本失稳形态, 即分支点(或分叉点)失稳和极值点失稳^[43]. 采用小稳定性准则判别弹性钻柱分支点失稳的临界状态. 小稳定性准则包括三个等价的判别准则, 即动力学准则、能量准则和静力学准则. 这里只讨论静力学判别准则, 给出钻柱(圆截面)弹性稳定性问题的一般扰动方程.

取拉格朗日坐标系 (ξ, η, ζ) (或称为嵌入坐标系), 坐标原点嵌在钻柱形心, 相应的坐标基矢量为 (e_ξ, e_η, e_ζ) , 其中 $e_\xi = e_x, e_\eta$ 和 e_ζ 在钻柱截面内相互正交. 设标架 (e_ξ, e_η, e_ζ) 沿钻柱的变化率为 k_r (称为总曲率矢量), 并记为:

$$k_r = k_\xi e_\xi + k_\eta e_\eta + k_\zeta e_\zeta \quad (61)$$

式中, k_ξ 和 k_η 是 k_r 的分量, 即 $k_r^2 = k_\xi^2 + k_\eta^2$. k_ξ, k_η 及 k_ζ 可表示为:

$$\begin{cases} k_\xi = -e_\eta \frac{de_\zeta}{ds} \\ k_\eta = e_\xi \frac{de_\zeta}{ds} \\ k_\zeta = e_\eta \frac{de_\xi}{ds} = -e_\xi \frac{de_\eta}{ds} \end{cases} \quad (62)$$

将 F 及 M 记为:

$$\begin{cases} F = Q_\xi e_\xi + Q_\eta e_\eta + Q_\zeta e_\zeta \\ M = M_\xi e_\xi + M_\eta e_\eta + M_\zeta e_\zeta \end{cases} \quad (63)$$

其中, Q_ξ, Q_η 为剪力, Q_ζ 为轴力; M_ξ, M_η 为弯矩, $M_\zeta = -M_t$ 为扭矩. 代入式 (6) 和式 (7) 得

$$\begin{cases} \frac{dQ_\xi}{ds} + k_\eta Q_\xi - k_\zeta Q_\eta + h_\xi = 0 \\ \frac{dQ_\eta}{ds} + k_\xi Q_\xi - k_\zeta Q_\zeta + h_\eta = 0 \\ \frac{dQ_\zeta}{ds} + k_\xi Q_\eta - k_\eta Q_\xi + h_\zeta = 0 \end{cases} \quad (64)$$

$$\begin{cases} \frac{dM_\xi}{ds} + k_\eta M_\xi - k_\zeta M_\eta - Q_\eta + m_\xi = 0 \\ \frac{dM_\eta}{ds} + k_\zeta M_\xi - k_\xi M_\zeta + Q_\xi + m_\eta = 0 \\ \frac{dM_\zeta}{ds} + k_\xi M_\eta - k_\eta M_\zeta + m_\zeta = 0 \end{cases} \quad (65)$$

式中, $h_i = \mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i$, $m_i = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_i$ ($i = \xi, \eta, \zeta$).

物理关系为:

$$\begin{cases} M_\xi = EI \cdot k_\xi \\ M_\eta = EI \cdot k_\eta \\ M_\zeta = GJ \cdot k_\zeta \end{cases} \quad (66)$$

假设无应力状态时钻柱的初始曲率为 $(k_\xi^0, k_\eta^0, k_\zeta^0)$, 对应外力 \mathbf{h} 和 \mathbf{m} , 方程 (64) 和 (65) 有两组解: $(Q_\xi, Q_\eta, Q_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta, k_\xi, k_\eta, k_\zeta)$ 及 $(Q_\xi + Q_\xi^*, Q_\eta + Q_\eta^*, Q_\zeta + Q_\zeta^*, M_\xi + M_\xi^*, M_\eta + M_\eta^*, M_\zeta + M_\zeta^*, k_\xi + k_\xi^*, k_\eta + k_\eta^*, k_\zeta + k_\zeta^*)$. 其中所有带上标“*”的量均是扰动小量. 将这两组解分别代入方程组 (64) 和 (65) 中, 并对对应方程相减, 同时略去扰动量的二阶项, 便得到线性化的齐次扰动方程组如下:

$$\begin{cases} \frac{dQ_\xi^*}{ds} + k_\eta^* Q_\zeta + (k_\eta^0 + k_\eta) Q_\zeta^* - k_\zeta^* Q_\eta - (k_\zeta^0 + k_\zeta) Q_\eta^* = 0 \\ \frac{dQ_\eta^*}{ds} + k_\zeta^* Q_\xi + (k_\zeta^0 + k_\zeta) Q_\xi^* - k_\xi^* Q_\zeta - (k_\xi^0 + k_\xi) Q_\zeta^* = 0 \\ \frac{dQ_\zeta^*}{ds} + k_\xi^* Q_\eta + (k_\xi^0 + k_\xi) Q_\eta^* - k_\eta^* Q_\xi - (k_\eta^0 + k_\eta) Q_\xi^* = 0 \\ \frac{dM_\xi^*}{ds} + k_\eta^* M_\zeta + (k_\eta^0 + k_\eta) M_\zeta^* - k_\zeta^* M_\eta - (k_\zeta^0 + k_\zeta) M_\eta^* - Q_\eta^* = 0 \\ \frac{dM_\eta^*}{ds} + k_\zeta^* M_\xi + (k_\zeta^0 + k_\zeta) M_\xi^* - k_\xi^* M_\zeta - (k_\xi^0 + k_\xi) M_\zeta^* + Q_\zeta^* = 0 \\ \frac{dM_\zeta^*}{ds} + k_\xi^* M_\eta + (k_\xi^0 + k_\xi) M_\eta^* - k_\eta^* M_\xi - (k_\eta^0 + k_\eta) M_\xi^* = 0 \end{cases} \quad (67)$$

物理关系为:

$$\begin{cases} M_\xi^* = EI \cdot k_\xi^* \\ M_\eta^* = EI \cdot k_\eta^* \\ M_\zeta^* = GJ \cdot k_\zeta^* \end{cases} \quad (68)$$

若扰动方程组 (67) 和 (68) 只有零解, 则系统处于稳定的平衡状态; 若有非零解, 则系统处于不稳定的平衡状态. 这两者的分界便是临界状态, 据此可确定系统的临界载荷^[42]. 例如: 在旋转钻井过程中, 钻柱下部组合同时承受轴向压力 P 和扭矩 M_t , 若钻柱下部组合为光钻铤且两端为铰支边界, 则可根据上述稳定性准则得到如下临界关系:

$$4EIP + M_t^2 = \left(\frac{2\pi EI}{L} \right)^2 \quad (69)$$

式中, L 表示钻铤失稳临界长度.

钻柱屈曲后的受力状态, 可根据方程组 (64) 和 (65) 进行分析研究^[37, 39].

6 钻柱运动学问题

钻柱的一般运动状态是非常复杂的,人们已知的钻柱自转、公转和“反转运动”只是它的几个特例。近几年来,随着理论和测试技术的发展,人们对钻柱运动状态的认识不断深入,一些以往无法解释的现象逐渐被理解,对钻具涡动的认识就是如此。模拟试验和井下实测表明^[44~47],钻柱和钻头(主要是PDC钻头)都有涡动现象发生。钻柱有向前涡动和向后涡动等形式,弯曲是其产生涡动的前提,摩擦力有利于维持其向后涡动;涡动受钻压、转速的影响较大;扶正器、井眼形状、钻井液、井眼视半径及岩石性质等许多因素都影响涡动。钻柱涡动与钻头涡动可以相互诱发,两者一起涡动时,寿命有很大影响。然而,由于对涡动的研究较少,还没有可靠模型。许多结论尚属推断,需要深入进行研究^[48]。

关于钻柱运动学的下步研究,侧重下列内容:(1)建立或完善各种形式的钻柱运动学方程,探讨钻柱上任一点的运动规律;(2)结合钻柱和钻头的受力分析,研究钻柱不同运动形式的成因和判据,以便控制钻柱的运动状态;(3)研究钻柱不同运动状态的利和弊,以便采取对策(包括变换井下钻具组合和改善泥浆性能等)(4)配合理论分析,开展实验研究和实际井下测量;(5)分析和比较钻柱运动学及钻头运动学的特点,找出两者的内在联系。

7 结束语

以钻柱为研究对象所获得的基本方程和分析方法,对于其它相同性质问题的管柱同样适用。例如,对于套管柱的摩阻问题、弹性稳定性问题以及其它常规受力和变形问题,均可使用本文的基本方程进行分析求解。文中所讨论的管柱力学问题具有常规性和整体性的特点,诸如热应力和腐蚀环境的影响问题,局部的应力集中和强度破坏问题,以及套管的外挤和内压问题^[49]等等,都应是管柱力学研究的重要内容。

致谢 感谢刘希圣教授和徐秉业教授对本文工作的指导和帮助。

参 考 文 献

- 1 Lubinski A. Woods H B. Factors Affecting the Angle of Inclination and Dog-legging in Rotary Boreholes. Drill and Prod Prac. API. 1953: 222
- 2 Williamson J S. Lubinski A. Predicting Bottomhole Assembly Performance. SPE/IADC Conf Feb. 1986. Dallas. SPE Paper # 14764; Also in SPE/Drilling Engng. 1987: 37~46
- 3 Bradley W B et al. Advantages of Heavy Metal Collars in Directional Drilling and Deviation Control. JPT. 1976: 521~530
- 4 白家祉. 苏义脑. 井斜控制理论与实践. 北京: 石油工业出版社. 1990
- 5 赵国珍. 龚伟安. 钻井力学基础. 北京: 石油工业出版社. 1988
- 6 杨勋尧. 满眼防斜钻具的最优设计. 石油学报. 1982 增刊
- 7 Walker B H et al. Three Dimensional Force and Deflection Analysis of a Variable Cross Section Drillstring. Jour. of Pressure Vessel Technonology. 1977: 367
- 8 Millheim K K et al. Bottomhole Assembly Analysis Using the Finite Element Method. JPT. FEB. 1978: 256
- 9 施太和. 下部钻柱性能的计算机模拟. 西南石油学院学报. 1983. (3)
- 10 Ho H S. General Formation of Drillstring Under Large Deformation and Its Use in BHA Analysis. SPE Ann Tech Conf. 1986. New Orleans. SPE Paper # 15562
- 11 刘希圣. 高德利. 崔孝秉. 底部钻具组合三维静力分析的权余法. 石油大学学报(自然科学版). 1988. 12(3): 58~67

- 12 晁恒木等. 有限元法在底部钻具组合动态分析中的应用. 石油大学学报(自然科学版). 1990. 14(6):54~61
- 13 高德利等. 井眼轨迹控制. 山东省东营市: 石油大学出版社. 1994
- 14 高德利. 刘希圣. 水平井下部钻具组合的力学分析方法. 第二届中国—加拿大稠油开采技术研讨会. 中国涿州市. 1990年10月
- 15 高德利. 刘希圣. 下部钻具组合大挠度问题的权余法分析. 石油学报. 1992. 13(3)
- 16 高德利. 刘希圣. 带弯接头井下动力钻具的造斜特性. 石油钻探技术. 1991. 19(2)
- 17 高德利. 徐秉业. 石油钻井底部钻具组合平面纵横弯曲大挠度分析. 工程力学. 1992. (4)
- 18 Millheim, K K et al. How BHA Dynamics Affect Bit Trajectory. World Oil. May 1981
- 19 Millheim K K et al. The Effect of BHA Dynamics on the Trajectory of a Bit. JPT. Dec. 1981
- 20 Brakel J D, Azar J J. Prediction of Wellbore Trajectory Considering BHA and Drill Bit Dynamics. SPE/IADC Conf. New Orleans. Mar. 1987. SPE #16172
- 21 Birades M. Static and Dynamic 3-D BHA Computer Models. and A Micro-computer Program for Prediction of BHA Trajectory. SPE/Drilling Engineering. June 1988
- 22 Baird, J A et al. GEODYN: A Geological Formation/Drillstring Dynamics Computer Program. 59th Ann. Conf., SPE of AIME. Houston. 1984. SPE paper # 13023
- 23 Baird J A et al. GEODYN2: A BHA/Geological Formation Dynamic Interaction Computer Program. SPE Ann. Conf. Las Vegas. 1985. SPE Paper # 14328
- 24 高德利. 典型定向钻具组合的力学分析方法. 石油大学学报(自然科学版). 1993. 17(6):35~40
- 25 高德利. 徐秉业. 弹性钻柱运动的基本方程问题. 中国博士后论文集. (4). 北京大学出版社: 1991年6月
- 26 Ho H S. An Improved Modeling Program for Computing the Torque and Drag in Directional and Deep Wells. SPE 18047. 1988
- 27 Maidla E E et al. Field Comparison of 2-D and 3-D Methods for the Borehole Friction Evaluation in Directional Wells. SPE 16663. 1987
- 38 Sheppard M C et al. Designing Well Paths to Reduce Drag and Torque. SPE Drilling Engng. Dec. 1987
- 29 张建新. 孙学增. 潘卫国. 定向井中摩擦阻力模式及其应用的初步研究. 大庆石油学院学报. 1989. (4)
- 30 杨姝. 高德利. 徐秉业. 定向井钻柱摩阻问题的有限差分解. 石油钻探技术. 1992. 20(3)
- 31 Corbett K T. Dawson R. Drillstring Design for Directional Wells. OGJ. April 30. 1988
- 32 清华大学. 定向井钻柱强度设计与校核问题的探讨. 清华大学1992届工程力学专业学士论文. 1992年7月
- 33 Maidla E E et al. Laboratory Study of Borehole Dynamic-Filtration Apparatus. SPE/Drilling Engineering. Sept. 1990
- 34 Quigley M S et al. A Full-scale Wellbore Friction Simulator. IADC/SPE Drilling Conf. Feb. 1990. Houston. Texas. IADC/SPE 19958
- 35 Falconer I G et al. Application of a Real Time Wellbore Friction Analysis. IADC/SPE. Drilling Conf. Feb. 1989. New Orleans. IADC/SPE 18649
- 36 Lubinski A. A Study of the Buckling of Rotary Drilling String. Drilling and Production Practice. 178(1950)
- 37 Lubinski A. Helical Buckling of Tubing Sealed in Packers. JPT. June 1962
- 38 Dunayevsky V A. et al. Conservative and Nonconservative Buckling of Drillpipe. SPE Ann Tech. Conf. Oct. 1983. San Francisco. SPE 11991
- 39 龚伟安. 旋转钻柱的弯曲问题. 石油矿场机械. 1986. 6(15)
- 40 Dawson R. Paslay P R. Drillpipe Buckling in Inclined Holes. JPT. 1984: 1734
- 41 Dunayevsky V A. et al. Dynamic Stability of Drillstring Under Fluctuating Weight-on-bit. SPE Ann Tech. Conf. Sept. 1985. Las Vegas. SPE 14329
- 42 武际可. 黄永刚. 弹性曲杆的稳定性问题. 力学学报. 1987. 19(5)
- 43 周承侗. 弹性稳定理论. 四川人民出版社. 1981
- 44 J Kin Vandiver, James W Nicholson, Rong-Juin Shyu. Case Studies of the Bending Vibration and Whirling

- Motion of Drill Collars. SPE Drilling Engineering, Dec. 1990
- 45 Thomas M Warren, J Ford Brett, L Allen Sinor. Development of a Whirl-resistant Bit. SPE Drilling Engineering, Dec. 1990
- 46 J Ford Brett, Thomas M Warren, Suzanne M Behr. Bit Whirl— A New Theory of PDC Bit Failure. SPE Drilling Engineering, Dec. 1990
- 47 Burgess T M, McDaniel G L, Das P K. Improving BHA Tool Reliability With Drillstring Vibration Models. Field Experience and Limitations. SPE/IADC 16109
- 48 高德利, 高宝奎等. 关于钻柱涡动问题的初步探讨. 钻井基础理论研讨会第二届年会. 中国石油工程学会. 1992年8月
- 49 郝俊芳, 龚伟安. 套管强度计算与设计. 石油工业出版社, 1987

SOME BASIC PROBLEMS OF ELASTIC DRILLSTRING MECHANICS

Gao Deli

(University of Petroleum, Beijing, China 102200)

Abstract The general formulations of the motion of elastic drillstring with equal principal stiffnesses are established through a vector analysis according to the general theorems of dynamics. These formulations account for whirling inertia of the drillstring. In addition, this paper gives a discussion on mechanical analysis for the static behavior of a bottomhole assembly (BHA) and the torque—drag of drillstring in directional well.

Subject words Drill stem mechanics; Vector analysis; Equilibrium equation; Directional wells; Directional control

About the author Gao Deli, male, was born in 1958. He graduated from East China Petroleum Institute in 1982, and received master and doctor degrees of science from Xinan Petroleum Institute in 1984 and from the University of Petroleum in 1991. He finished his postdoctor courses in Qinghua University in 1992. Now as a professor he works on drilling dynamics in the University of Petroleum, Beijing, China.